Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:
15 luglio 2024

3 Secondo Principio della Termodinamica

3.6 Lezione #14

3.6.3 Esempi 3.9 e successivo 3.12 del Focardi

Una macchina termica reversibile scambia calore con un corpo di capacità termica C (costante nell'intervallo di temperature in gioco), e con l'ambiente che funziona da termostato. Sapendo che inizialmente il corpo si trova alla temperatura T_i e che la temperatura dell'ambiente è $T_0 > T_i$, determinare la temperatura massima raggiungibile dal corpo. Sia $T_0 = 27°C$e $T_i = 0°C$.

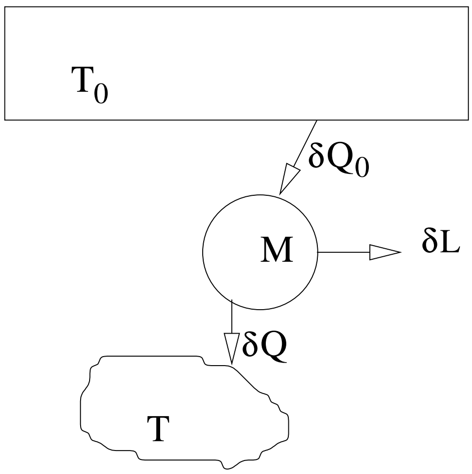

Figura 1: macchina di Carnot

La macchina è reversibile e possiamo farla funzionare come macchina termica che lavori tra due termostati (macchina di Carnot); per farlo ipotizziamo che la macchina compia dei cicli infinitesimi scambiando calore con l'ambiente a temperatura T_0 ed il corpo a temperatura "costante" T (nel senso che varia di una quantità infinitesima ad ogni ciclo con continuità) [Fig. 1]. Reiteriamo i cicli fintantoché la temperatura del corpo non raggiunge quella del serbatoio; a quel punto la macchina smette di lavorare perché ha a disposizione due termostati alla stessa temperatura T_0 e quindi di fatto un unico termostato. Ad ogni ciclo, in base al **I** principio della termodinamica:

$$dU = 0 \to \delta L = \delta Q_0 + \delta Q$$

dove sarà per convenzione $\delta Q_0 > 0$ e $\delta Q < 0$. Per il teorema di Carnot abbiamo inoltre che

$$\frac{\delta Q_0}{T_0} + \frac{\delta Q}{T} = 0$$

e semplificando si ottiene

$$\delta L = \delta Q(1 - \frac{T_0}{T})$$

Per quanto riguarda il corpo, con capacità termica C possiamo utilizzare la relazione

$$C = \frac{-\delta Q}{dT}$$

in quanto δQ è il calore ceduto dal sistema (macchina reversibile), ed otteniamo

$$\delta L = C(\frac{T_0}{T} - 1)dT$$

Possiamo quindi integrare per ottenere il lavoro totale fatto dalla macchina

$$L = \int_{T_i}^{T_0} C(\frac{T_0}{T} - 1)dT = C(T_0 \ln\frac{T_0}{T_i} - T_0 + T_i) > 0$$

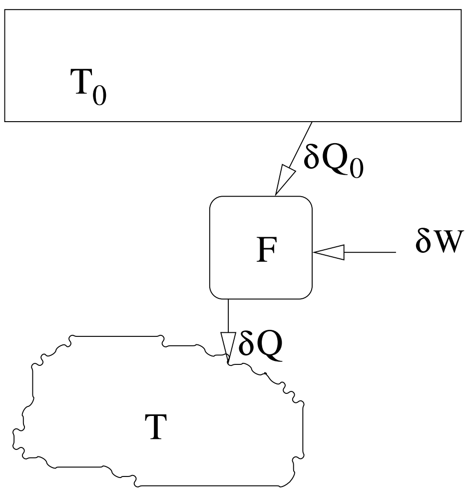

Figura 2: frigorifero di Carnot

A questo punto posso utilizzare il lavoro L per far funzionare la macchina reversibile come frigorifero il cui compito e' quello di continuare a trasferire calore dall'ambiente al corpo con il risultato di aumentarne la temperatura ulteriormente. Avremo cura di lavorare nelle stesse condizioni di prima, con variazioni infinitesime.

Dalla Fig. 2, in base al **I** principio della TD possiamo scrivere

$$dU = 0 \rightarrow -\delta W = \delta Q_0 + \delta Q$$

ricordo che W è positivo quando fatto sul sistema, $\delta Q_0 > 0$ e $\delta Q < 0$. Anche in questo caso possiamo fare l'ipotesi di un "frigorifero di Carnot", per cui alla fine otteniamo la stessa espressione di prima

$$-\delta W = C(\frac{T_0}{T} - 1)dT$$

in cui risulta correttamente $\delta W > 0$ in quanto $T > T_0$, e possiamo integrare fra T_0 e la temperatura finale T_f

$$W = -\int_{T_0}^{T_f} C(\frac{T_0}{T} - 1)dT = -C(T_0 \ln\frac{T_f}{T_0} - T_f + T_0) > 0 \ .$$

Poniamo $W = L$ (il lavoro fatto sul frigorifero equivale al lavoro fatto dalla macchina termica) e ricaviamo T_f:

$$C(T_0 \ln\frac{T_0}{T_i} - T_0 + T_i) = -C(T_0 \ln\frac{T_f}{T_0} - T_f + T_0)$$

che semplificata dà come risultato:

$$T_f = T_i + T_0 \ln \frac{T_f}{T_i}$$

Si tratta di un'equazione trascendente. Con i dati iniziali il risultato è $T_f \simeq 56\,^\circ C$. Va evidenziato il fatto che il risultato non dipende dalla capacità termica del corpo, ma solo dalla temperatura iniziale del corpo e dell'ambiente che funge da termostato. In pratica se la capacità termica è "grande" questo implica una maggiore quantità di lavoro prodotto dalla macchina termica, ma anche necessariamente una maggiore quantità di lavoro da fare per il frigorifero per innalzare la temperatura del corpo.

Possiamo ora provare a risolvere questo esercizio basandoci solo su considerazioni legate al principio di aumento dell'entropia. Assumo di utilizzare una "speciale macchina reversibile" che alla fine dei cicli avrà compiuto un lavoro totale nullo, assorbito una quantità di calore $Q_0 > 0$ dall'ambiente e, per il **I** principio della termodinamica avrà di conseguenza ceduto il calore $Q = -Q_0$ al corpo, per cui il calore assorbito dal corpo è $-Q = Q_0 = C(T_f - T_i)$. Dal II principio avremo $\Delta S_U = 0$ e quindi $\Delta S_U = \Delta S_{amb} + \Delta S_{corpo} = 0$, con

$$\Delta S_{amb} = \frac{-Q_0}{T_0} < 0$$

$$\Delta S_{corpo} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{-\delta Q}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C dT}{T} = C \ln \frac{T_f}{T_i} > 0$$

Mettendo assieme queste relazioni otteniamo

$$\Delta S_U = -\frac{Q_0}{T_0} + C \ln \frac{T_f}{T_i} = \frac{-C(T_f - T_i)}{T_0} + C \ln \frac{T_f}{T_i} = 0$$

e quindi il risultato già trovato

$$T_f = T_i + T_0 \ln \frac{T_f}{T_i}$$